Leçon 160 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

Développements :

L'exponentielle induit un homéomorphisme entre $S_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})^{++}$, $SO_3(\mathbb{R})$ est simple/

Bibliographie :

Rombaldi, Escofier, Gourdon, Grifone, H2G2.

Rapport du jury 2016 :

Dans cette leçon, le caractère euclidien de l'espace est essentiel pour que l'endomorphisme soit remarquable. Le théorème spectral pour les auto-adjoints et la réduction des endomorphismes orthogonaux sont des résultats incontournables. Le lemme des noyaux ou la décomposition de Dunford ne sont pas des développements adaptés à cette leçon. En revanche, l'utilisation du fait que l'orthogonal d'un sous-espace stable par un endomorphisme est stable par l'adjoint doit être mis en valeur. De même la réduction de endomorphismes normaux peut être évoquée.

Rapport du jury 2017 :

Dans cette leçon, le caractère euclidien de l'espace est essentiel pour que l'endomorphisme soit remarquable. Le théorème spectral pour les auto-adjoints et la réduction des endomorphismes orthogonaux sont des résultats incontournables. Le jury met les candidats en garde sur le fait que le lemme des noyaux ou la décomposition de Dunford ne sont pas des développements adaptés à cette leçon. En revanche, l'utilisation du fait que l'orthogonal d'un sous-espace stable par un endomorphisme est stable par l'adjoint doit être mis en valeur. De même la réduction d'endomorphismes normaux peut être évoquée. Une illustration pertinente peut s'appuyer sur la description de problèmes de moindres carrés en faisant ressortir le rôle de l'hypothèse de rang plein de A sur le caractère inversible de $A^T A$.

Remarque 1. *E est un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie n, muni d'un produit scalaire $<>$, de norme associée $||.||$.*

1 Endomorphisme adjoint (adjoint d'un endomorphisme ?)

1.1 Définition

Définition 2 (Grifone p238). *[Romb p702] Pour tout $f \in End(E)$, il existe un unique endomorphisme $f^* \in End(E)$ tel que $\forall x, y \in E, < f(x), y >=< x, f^*(y) >$. L'endomorphisme f^* est appelé adjoint de f.*

Exemple 3 (Escofier p352). *Homothétie, symétrie orthogonale.*

Exemple 4 (Gourdon p269). $\phi_A : M \mapsto A^t M A$.

Proposition 5 (Grifone p238). *[Romb p703] Matrice de l'adjoint. Parler de la matrice de Gram si base non orthonormée ?*

Exemple 6. *Sur l'espace des matrices, on considère les produit scalaire $< A, B >= Tr(A^t B)$. Les matrices A et B étant fixées, l'adjoint de l'endomorphisme $M \mapsto AMB$ est $M \mapsto A^t M B^t$.*

Exemple 7 (Gourdon p239). *Adjoint de $\phi_A(M) = A^t M A$.*

Application 8 (Grifone p258). *Si $AA^t = 0$ alors $A = 0$.*

Proposition 9 (Grifone p238). *[Romb p704] f^* est involutif.*

Proposition 10 (Grifone p238). *[Romb p704] Toutes les propriétés.*

Remarque 11. *Même polynome minimal et même polynôme caractéristique.*

Proposition 12 (Gourdon p258). *Si F est stable par u alors $F^\perp$ est stable par u^*.*

1.2 Adjoints remarquables

Définition 13 (Gourdon p258). *[Romb p728] Endomorphisme normal.*

Proposition 14 (Romb p729). *u est normal si et seulement si $A^t A = AA^t$.*

Exemple 15 (Grifone p286). $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *est normale.*

Si $A \in A_n(\mathbb{R})$, $A + \lambda A_n(\mathbb{R})$ est normale.
Ex 22.7 et 22.9 Romb p736.

Remarque 16. *Les endomorphismes suivants sont normaux.*

Définition 17 (Grifone p252). *[Romb p717][Romb p728] Endomorphisme autoadjoint (ou symétrique ?).*

Proposition 18 (Romb p717). *u est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée est symétrique (ie $A^t = A$ et définir $S_n(\mathbb{R})$).*

Exemple 19 (Romb p718)**.** *$u+u^*$, u^*u... sont autoadjoints.*
Les projecteurs orthogonaux sont autoadjoints.

Définition 20 (Romb p729)**.** *Endomorphisme antisymétrique.*

Proposition 21. *Idem.*

Définition 22 (Romb p729)**.** *Endomorphisme orthogonal (isométrie).*

Proposition 23 (Romb p706)**.** *L'ensemble des endomorphismes orthogonaux forme un groupe pour la composition.*

Proposition 24 (Romb p708)**.** *u est une isométrie si et seulement si $A^tA = AA^t = I_n$. Définir les matrices orthogonales et $O_n(\mathbb{R})$.*

Exemple 25 (Escofier p344)**.** *[Romb p705] Les symétries orthogonales sont des isométries.*
Homothéties de rapport $|\lambda| = 1$.

Exemple 26 (Grifone p241)**.** *Ex d'une matrice orthogonale.*

Contre exemple 27 (Romb)**.** *Contre exemple en base non orthonormée.*

Contre exemple 28. *La matrice $M = E_{n,1}$ n'est ni autoadjointe, ni orthogonale, ni normale.*

Contre exemple 29. *Somme de deux endomorphismes normaux non normal :*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

.

2 Réduction des endomorphismes normaux

Proposition 30 (Gourdon p258)**.** *[Romb p744] u est normal si et seulement si $||u(x)|| = ||u^*(x)||$.*

Proposition 31 (Romb p729)**.** *Si F est stable par u alors $F^\perp$ est stable par u.*

Proposition 32 (Romb)**.** *Pour tout $u \in L(E)$, il existe un sev de dimension 1 ou 2 stable par u.*

Proposition 33 (Romb p730)**.** *Lemme en dimension 2 pour une matrice normale.*

Théorème 34 (Gourdon p260)**.** *Réduction des endomorphismes normaux.*

Remarque 35 (Gourdon p262)**.** *Si M est antisymétrique et n est impair alors M n'est pas inversible.*

Remarque 36. *Attention on utilise qu'une matrice de passage d'une bon vers une bon est orthogonale dans le théorème de réduction ! Il s'agit au moins de préciser que ce point sera détaillé plus tard, dans la partie sur les endomorphismes orthogonaux.*

Remarque 37. *Un endomorphisme u est normal si et seulement si u^* est un polynôme en u.*

3 Endomorphismes orthogonaux

3.1 Quelques propriétés

Proposition 38 (Grifone p238)**.** *[Romb p704] Soit $f \in End(E)$. On a l'équivalence :*
i) f est orthogonal.
ii) $\forall x, y \in E, < f(x), f(y) >=< x, y >$.
iii)$\forall x \in E, ||f(x)|| = ||x||$.
iv) f envoie toute base orthonormée de E sur une autre base orthonormée de$E$.
v) f envoie une base orthonormée de E sur une base orthonormée de E.

Application 39. *$P_\sigma \in O_n(\mathbb{R})$.*

Exemple 40 (Romb p705)**.** *Les seules homothéties dans $O(E)$ sont id et $-id$.*
En dimension 1.
Grifone p241 (matrice orthogonale), Romb p736 avec la réflexion.

Proposition 41 (Gridone p241)**.** *La matrice de passage entre deux bases orthonormées est orthogonale.*

Proposition 42 (Romb p706)**.** *$O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$ dont le centre est $\{+-Id_E\}$.*

Proposition 43 (Romb p709)**.** *Si $A \in O_n(\mathbb{R})$, $det(A) = +-A$ et pour tout $u \in O(E), det(u) = +-1$.*

Définition 44 (Romb p709)**.** *$SO_n(\mathbb{R})$ et $O_n^-(\mathbb{R})$.*

Exemple 45. $\det(P_\sigma) = \epsilon(\sigma)$ *donc $\in SO_n(\mathbb{R})$ si σ est paire.*

Proposition 46 (Romb p709)**.** *$SO_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe distingué de $O(E)$ d'indice 2.*

Proposition 47 (Romb p709)**.** *Composantes connexes de $O(E)$.*

Proposition 48 (Romb p710)**.** *Si $A \in SO_n(\mathbb{R})$ alors A est égale à la matrice des cofacteurs de A.*

Proposition 49 (Romb p744)**.** *Si f est antisymétrique, alors $\exp(f)$ est orthogonal.*

Proposition 50. *$O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont compacts.*

Théorème 51. *$O(E)$ est engendré par les symétries orthogonales par rapport à un hyperplan. $SO_n(\mathbb{R})$ est engendré par les retournements (symétries par rapport à un sous-espace de codimension 2). (Ici ?)*

Exemple 52 (Romb p736)**.** *$x - 2 < x|a > /||a||^2$ est une réflexion.*

3.2 Réduction des endomorphismes orthogonaux

Proposition 53 (Romb p711)**.** *Les seules valeurs propres réelles possibles d'une isométrie sont 1 et -1. (Ce sont des racines de l'unité).*

Contre exemple 54. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Théorème 55 (Romb p712)**.** *Théorème de réduction.*

Corollaire 56 (Romb p713)**.** *Composantes connexes.*

Application 57 (FGN algèbre 3 p65)**.** *[Romb p744] $exp : A_n \to SO_n$ est surjective.*

3.3 Le cas des dimensions 2 et 3

Proposition 58 (Grifone p242)**.** *Matrices pour $A \in O_2(\mathbb{R})$. Dessins.*

Proposition 59 (Grifone p243)**.** *Les matrices de $SO_3(\mathbb{R})$ sont semblables à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(t) & -sin(t) \\ 0 & sin(t) & cos(t) \end{pmatrix}$ pour un $t \in [0, 2\pi[$.*

Celles de $O_3^-(\mathbb{R})$ sont $-I_3$ ou semblables à $Diag(-1, 1, 1)$.

Définition 60. *Lorsque $\theta = \pi$, on parle de retournement.*

Application 61. *$SO_3(\mathbb{R})$ est simple.*

Proposition 62 (Grifone p245)**.** *Pour $M \in SO_3(\mathbb{R})$, on a alors : $det(M) = 1, Tr(M) = 1 + 2cos(t)$.*

Remarque 63 (Grifone p245)**.** *Remarque sur le calcul pratique de l'angle d'une rotation en dimension 3.*

Exemple 64 (Grifone p245)**.**

4 Endomorphismes autoadjoints

4.1 Propriétés et réduction

Exemple 65 (Escofier p353)**.**

Proposition 66 (Gourdon p228)**.** *$M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.*

Application 67. *Lemme introductif du lemme de Morse avec les voisinages ?*

Proposition 68 (Romb p717)**.** *Dimension de $S(E)$.*

Proposition 69 (Romb p718)**.** *Les valeurs propres sont toutes réelles.*

Proposition 70 (Romb p719)**.** *E_λ et E_μ sont orthogonaux.*

Théorème 71 (Romb p719)**.** *Théorème spectral et version matricielle.*

Contre exemple 72 (Romb p720)**.** *Sur $\mathbb{C}$.*

Exemple 73. *Dans les exercices.*

4.2 Endomorphismes symétriques positifs ou définis positifs

Définition 74 (Romb p720)**.** *Symétrique positif et défini positif et version matricielle.*

Proposition 75 (Romb p721)**.** *$u \in S^+(E)$ si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.*

Exemple 76. *Un projecteur orthogonal est $S^+(E)$.*

Application 77 (Romb p721)**.** *$A \in S_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si $A = B^tB$.*

Proposition 78 (Romb p723)**.** *$A \in S_n^{++}$ si et seulement si tous ses mineurs principaux son strictement positifs.*

Corollaire 79 (Romb p723)**.** *S_n^{++} est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.*

Application 80. *$exp : S_n \to S_n^{++}$ est un homéomorphisme.*

4.3 Applications

Proposition 81. *Si $M \in S_n^{++}$ alors $(X, Y) \mapsto X^tMY$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.*

Théorème 82 (Gourdon)**.** *Théorème de pseudo-réduction simultanée.*

Application 83. *Log concavité du déterminant.*

Application 84. *Ellipsoïde de John-Loewner.*

Théorème 85. *Réduction des formes quadratiques.*

Proposition 86 (Romb p725)**.** *Si $A \in S_n^+$ alors $A = B^2$ et B est un polynôme en A.*

Proposition 87 (Romb p727)**.** *[H2G2] Décomposition polaire et homéomorphisme.*

Proposition 88. *Maximalité du groupe orthogonal.*

Définition 89 (FGN)**.** *Point extremal.*

Proposition 90 (FGN)**.** *Points extremaux de la boule unité.*

Proposition 91 (Romb p728)**.** $||A|| = \sqrt{\rho(A^t A)}$.

Proposition 92. *Théorème de Courant-Fisher ?*